

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 29/01/08

Câu 1 (3 điểm). Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình (ẩn x, y) sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1 \end{cases}$$

Câu 2 (3 điểm). Cho tam giác ABC có góc \widehat{BEC} là góc nhọn, trong đó E là trung điểm của AB . Trên tia EC lấy điểm M sao cho $\widehat{BME} = \widehat{ECA}$. Ký hiệu α là số đo của góc \widehat{BEC} , hãy tính tỉ số $\frac{MC}{AB}$ theo α .

Câu 3 (2 điểm). Đặt $m = 2007^{2008}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên n mà $n < m$ và $n(2n + 1)(5n + 2)$ chia hết cho m .

Câu 4 (3 điểm). Cho dãy số thực (x_n) được xác định như sau:

$$x_1 = 0, x_2 = 2 \text{ và } x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Câu 5 (3 điểm). Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa 2008 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?

Câu 6 (3 điểm). Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right) \geq 4$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 7 (3 điểm). Cho tam giác ABC , trung tuyến AD . Cho đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AD . Xét điểm M nằm trên đường thẳng d . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của MB và MC . Đường thẳng đi qua E và vuông góc với đường thẳng d cắt đường thẳng AB tại P , đường thẳng đi qua F và vuông góc với đường thẳng d cắt đường thẳng AC tại Q . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi M di động trên đường thẳng d .

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không được giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI

Câu 1 (3 điểm). Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình (ẩn x, y) sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 29 & (1) \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1 & (2) \end{cases}$$

Bài giải

+ ĐK: $x, y > 0$

+ Từ (2) suy ra x, y cùng lớn hơn 1 hoặc cùng nhỏ hơn 1, kết hợp với (1), được x, y cùng lớn hơn 1

+ Đặt $\log_3 x = a, \log_2 y = b, \quad (a, b > 0)$ ta được hệ
$$\begin{cases} 9^a + 8^b = 29 & (3) \\ ab = 1 & (4) \end{cases}$$

Suy ra $9^a + 8^{\frac{1}{a}} = 29, \quad (a > 0)$ (5)

+ Xét hàm số $f(t) = 9^t + 8^{\frac{1}{t}} - 29, \quad t > 0$. Hàm số $f(t)$ liên tục, có đạo hàm mọi cấp tại mọi $t > 0$ và

$$f'(t) = 9^t \ln 9 - 8^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2} \ln 8$$

Và

$$f''(t) = 9^t \ln^2 9 + 8^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^4} \ln^2 8 + 8^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{2}{t^3} \ln 8 > 0, \forall t > 0$$

Do đó hàm số f lồi trên R^+ . Ngoài ra $f'(t)$ đồng biến trên R^+ , do

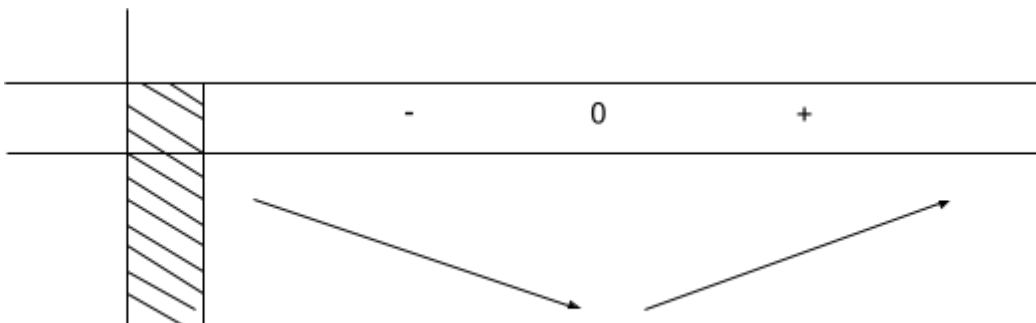
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = +\infty$$

Nên $\exists! t_0 > 0: f'(t_0) = 0$

Mặt khác

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = +\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t)$$

$f(1) < 0$ nên $[f(t)]_0 < 0$ và vì vậy ta có bảng



Từ đó, do tính liên tục của f nên (5) có hai nghiệm dương. Vậy hệ đã cho có hai nghiệm.

Câu 2 (3 điểm). Cho tam giác ABC có góc \widehat{BEC} là góc nhọn, trong đó E là trung điểm của AB . Trên tia EC lấy điểm M sao cho $\widehat{BME} = \widehat{ECA}$. Ký hiệu α là số đo của góc \widehat{BEC} , hãy tính tỉ số $\frac{MC}{AB}$ theo α .

Bài giải

Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $\widehat{AFE} = \alpha = \widehat{BEC}$ khi đó tam giác AEF cân tại A .

Vậy $AF = AE = EB$. Suy ra $\triangle AFC = \triangle BEM$

Suy ra $FC = EM, MC = FE$

Từ đó

$$\frac{MC}{AB} = \frac{FE}{AB} = \frac{FE}{2AE} = \cos \alpha$$

Câu 3 (2 điểm). Đặt $m = 2007^{2008}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên n mà $n < m$ và

$n(2n + 1)(5n + 2)$ chia hết cho m .

Bài giải

Bổ đề 1.

Cho $m \in \mathbb{Z}, m > 1$ và $a, b \in \mathbb{Z}: \gcd(a; m) = 1$. Khi đó phương trình $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$ có đúng một nghiệm theo \pmod{m} trong tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$

Bổ đề 2. trong đó $p, q \in \mathbb{Z}, p, q > 1$ và nguyên tố cùng nhau, và các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $\gcd(a; m) = \gcd(c; m) = 1$

Cho $m = p \cdot q$. Khi đó hệ

$$\begin{cases} ax + b \equiv 0 \pmod{p} \\ cx + d \equiv 0 \pmod{q} \end{cases}$$

Có duy nhất nghiệm theo \pmod{m} trong tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$

Ta có $\gcd(2n + 1; n) = 1 = \gcd(2n + 1; 5n + 2) = 1$ và $\gcd(n; 5n + 2) = 1$ hoặc 2 .

Đề ý rằng $2007 = 3^2 \times 223$ và $3, 223 \in \mathcal{P}$, nên có thể coi $m = 2007^{2008}$ là tích của $p, q \in \mathbb{Z}, p, q > 1$ và nguyên tố cùng nhau, không có số nào chia hết cho 5

Ta có $n(2n+1)(5n+2) : m \Leftrightarrow$ ba số $n, 2n+1, 5n+1$ chia hết cho m hoặc chúng có hai số chia hết cho p, q . Do đó có 9 trường hợp xảy ra $n < m$;

+ $n : m$ theo bổ đề 1 có một nghiệm.

+ $2n+1 : m$ theo bổ đề 1 có một nghiệm.

+ $5n+2 : m$ theo bổ đề 1 có một nghiệm.

+ Hai trong ba số $n, 2n+1, 5n+1$ chia hết cho p, q (có 6 trường hợp): mỗi trường hợp, theo bổ đề 2, có đúng một nghiệm.

Vậy có tất cả 9 số n thỏa mãn.

Câu 4 (3 điểm). Cho dãy số thực (x_n) được xác định như sau:

$$x_1 = 0, x_2 = 2 \text{ và } x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Bài giải

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $\frac{1}{2} < x_n < \frac{3}{2}, \forall n > 2$

Xét hàm số $f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}, x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Ta có $f'(x) = -2^{-x} \ln 2 < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ mà $\forall x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ thì $2^{-x} \in \left(\frac{1}{\sqrt{4}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset (0; 1)$. Do đó

$$|f'(x)| < \frac{\ln 2}{2} = u < 1$$

Mặt khác theo định lý Lagrange thì với mọi $\frac{1}{2} < x \leq y < \frac{3}{2}$ đều tồn tại $t \in (x; y)$ sao cho $2^{-x} - 2^{-y} = f'(t)(x - y)$

Vậy

$$|x_n - x_{n-1}| = |2^{-x_{n-2}} - 2^{-x_{n-3}}| < u |x_{n-2} - x_{n-3}| \dots$$

Từ đó

$$|x_{2n} - x_{2n-1}| < u^n \cdot |x_2 - x_1| \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow +\infty \text{)}$$

Từ đó, theo định lý Cauchy, dãy (x_n) hội tụ về α là nghiệm của phương trình

$$\alpha = 2^{-\alpha} + \frac{1}{2}. \text{ Giải phương trình ta thu được } \alpha = 1.$$

Câu 5 (3 điểm). Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa 2008 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?

Bài giải

Coi số cần tìm có đủ 2008 chữ số, nếu không bổ sung thêm các chữ số 0 vào trước

Gọi A là tập hợp các số chia hết cho 9, mỗi số gồm 2008 chữ số, B, C là tập hợp các số có 2008 chữ số, chia hết cho 9, và không có chữ số 9 nào, có đúng một chữ số 9 theo thứ tự đó; D là tập hợp các số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó

$$D \cap C = D \cap B = \emptyset, B \cup C \cup D = A$$

$$\text{Vậy } |D| = |A| - |B| - |C|$$

Gọi $S = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$

+ Có $|A| = \frac{10^{2008} - 1}{9} - 0 + 1 = \frac{10^{2008} + 8}{9}$ số chia hết cho 9.

+ Với mỗi bộ $\{a_1, a_2, \dots, a_{2007}\} \in S^{2007}$ tồn tại duy nhất $a \in S$ sao cho

$$a + \sum_{i=1}^{2007} a_i \equiv 9$$

Suy ra $|B| = 9^{2007}$

+ Tương tự $|C| = 2008 \cdot 9^{2006}$

+ Vậy có $\frac{10^{2008} + 8}{9} - 9^{2007} - 2008 \cdot 9^{2006}$ số thỏa mãn.

Câu 6 (3 điểm). Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$P = (xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right) \geq 4$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài giải

Coi $z = \min\{x, y, z\}$

Nên

$$\frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{1}{x^2} \quad \text{vì } z = 0$$

$$xy + yz + zx \geq xy \quad \text{vì } z = 0$$

$$\text{Suy ra } P = xy \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$P = xy \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\text{Ta thấy } \frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 2$$

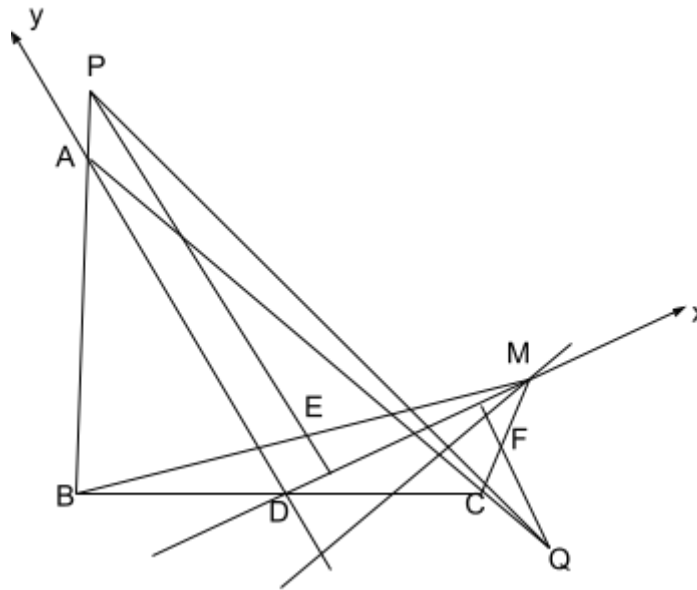
$$\frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ (x-y)^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} y \end{cases}$$

Câu 7 (3 điểm). Cho tam giác ABC , trung tuyến AD . Cho đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AD . Xét điểm M nằm trên đường thẳng d . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của MB và MC . Đường thẳng đi qua E và vuông góc với đường thẳng d cắt đường thẳng AB tại P , đường thẳng đi qua F và vuông góc với đường thẳng d

cắt đường thẳng AC tại Q . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi M di động trên đường thẳng d .

Bài giải



Rõ ràng chỉ cần xét $d \perp AD$ tại D là đủ. Chọn hệ trục Dxy như hình vẽ sao cho $A(0; a), C(2m; 2n), M(2b; 0)$. Do B, C đối xứng nhau qua D nên $B(-2m; -2n)$.

Từ đó:

$$(AB): (2n + a)x - 2my + 2ma = 0$$

$$(AC): (2n - a)x - 2my + 2ma = 0$$

Suy ra $P\left(b - m; \frac{(2n + a)(b - m)}{2m} + a\right)$ và $Q\left(b + m; \frac{(2n - a)(b + m)}{2m} + a\right)$

Suy ra $\overrightarrow{PQ} = \left(2m; 2n - \frac{ab}{m}\right)$

Đường thẳng qua M, vuông góc với PQ có phương trình

$$2m(x - 2b) + \left(2n - \frac{ab}{m}\right)y = 0$$

Khử tham số b, ta được đường thẳng này luôn đi qua điểm $S\left(\frac{4mn}{a}; -\frac{4m^2}{a}\right)$ với mọi b.