BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

BẢN CHÍNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2012

Môn: TOÁN

Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)

Ngày thi: **11/01/2012**

Bài 1 (*5,0 điểm*). Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 3 \text{ và } x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tìm giới hạn đó.

Bài 2 (*5,0 điểm*). Cho các cấp số cộng (a_n), (b_n) và cho số nguyên $m > 2$. Xét m tam thức bậc hai: $P_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Chứng minh rằng nếu hai tam thức $P_1(x)$ và $P_m(x)$ đều không có nghiệm thực thì tất cả các tam thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

Bài 3 (*5,0 điểm*). Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M, N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và BC. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm các đường phân giác trong của các cặp góc $\widehat{MAN}$ và $\widehat{MBN}$, $\widehat{MBN}$ và $\widehat{MCN}$, $\widehat{MCN}$ và $\widehat{MDN}$, $\widehat{MDN}$ và $\widehat{MAN}$. Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.

1/ Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm của đường tròn đó.

2/ Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng.

Bài 4 (*5,0 điểm*). Cho số nguyên dương n. Có n học sinh nam và n học sinh nữ xếp thành một hàng ngang, theo thứ tự tùy ý. Mỗi học sinh X (trong số $2n$ học sinh vừa nêu) được cho một số kẹo bằng đúng số cách chọn ra hai học sinh khác giới với X và đứng ở hai phía của X. Chứng minh rằng tổng số kẹo mà tất cả $2n$ học sinh nhận được không vượt quá $\frac{1}{3}n(n^2 - 1)$.

---HẾT---

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

BẢN CHÍNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2012

Môn: TOÁN

Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)

Ngày thi: **12/01/2012**

Bài 5 (*7,0 điểm*). Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

1/ Mỗi ghế có đúng một người ngồi;

2/ Thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải, là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5;

3/ Giữa G_1 và G_2 có ít nhất 3 chàng trai;

4/ Giữa G_4 và G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy ?

(Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Bài 6 (*7,0 điểm*). Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước số của b^2+2 và b là ước số của a^2+2. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi

$$v_1 = v_2 = 1 \quad \text{và} \quad v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2} \quad \text{với mọi} \quad n \geq 3.$$

Bài 7 (*6,0 điểm*). Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1/ f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$;

2/ f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$;

3/ $f(f(x)) = f(x) + 12x$ với mọi số thực x.

---HẾT---

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*