

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2015

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất : 08/01/2015

BẢN CHÍNH

Bài 1 (5,0 điểm). Cho a là một số thực không âm và (u_n) là dãy số xác định bởi:

$$u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{4n^2 + a} \sqrt{u_n^2 + 3} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Với $a = 0$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mọi $a \in [0; 1]$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq (a + b + c)^2.$$

Bài 3 (5,0 điểm). Cho số nguyên dương K . Tìm số các số tự nhiên n không vượt quá 10^K thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) n chia hết cho 3;

ii) các chữ số trong biểu diễn thập phân của n thuộc tập hợp $\{2, 0, 1, 5\}$.

Bài 4 (5,0 điểm). Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O) , BC không là đường kính. Một điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC . Cho (I) là đường tròn thay đổi đi qua E, F và có tâm là I .

a) Giả sử (I) tiếp xúc với BC tại điểm D . Chứng minh rằng $\frac{DB}{DC} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}$.

b) Giả sử (I) cắt cạnh BC tại hai điểm M, N . Gọi H là trực tâm tam giác ABC và P, Q là các giao điểm của (I) với đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC . Đường tròn (K) đi qua P, Q và tiếp xúc với (O) tại điểm T (T cùng phía A đối với PQ). Chứng minh rằng đường phân giác trong của góc \widehat{MTN} đi qua một điểm cố định.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2015
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

BẢN CHÍNH

Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai : 09/01/2015

Bài 5 (7,0 điểm). Cho $(f_n(x))$ là dãy đa thức xác định bởi:

$$f_0(x) = 2, f_1(x) = 3x, f_n(x) = 3xf_{n-1}(x) + (1-x-2x^2)f_{n-2}(x) \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $f_n(x)$ chia hết cho đa thức $x^3 - x^2 + x$.

Bài 6 (7,0 điểm). Với a, n nguyên dương, xét phương trình $a^2x + 6ay + 36z = n$, trong đó x, y, z là các số tự nhiên.

a) Tìm tất cả các giá trị của a để với mọi $n \geq 250$, phương trình đã cho luôn có nghiệm (x, y, z) .

b) Biết rằng $a > 1$ và nguyên tố cùng nhau với 6. Tìm giá trị lớn nhất của n theo a để phương trình đã cho không có nghiệm (x, y, z) .

Bài 7 (6,0 điểm). Có m học sinh nữ và n học sinh nam ($m, n \geq 2$) tham gia một Liên hoan Song ca. Tại Liên hoan Song ca, mỗi buổi biểu diễn một chương trình văn nghệ. Mỗi chương trình văn nghệ bao gồm một số bài song ca nam-nữ mà trong đó mỗi đôi nam-nữ chỉ hát với nhau không quá một bài và mỗi học sinh đều được hát ít nhất một bài. Hai chương trình được coi là khác nhau nếu có một cặp nam-nữ hát với nhau ở chương trình này nhưng không hát với nhau ở chương trình kia. Liên hoan Song ca chỉ kết thúc khi tất cả các chương trình khác nhau có thể có đều được biểu diễn, mỗi chương trình được biểu diễn đúng một lần.

a) Một chương trình được gọi là lệ thuộc vào học sinh X nếu như hủy tất cả các bài song ca mà X tham gia thì có ít nhất một học sinh khác không được hát bài nào trong chương trình đó. Chứng minh rằng trong tất cả các chương trình lệ thuộc vào X thì số chương trình có số lẻ bài hát bằng số chương trình có số chẵn bài hát.

b) Chứng minh rằng Ban tổ chức Liên hoan có thể sắp xếp các buổi biểu diễn sao cho số các bài hát tại hai buổi biểu diễn liên tiếp bất kỳ không cùng tính chẵn lẻ.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.