BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

BẢN CHÍNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2016

Môn : TOÁN

Thời gian : **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)

Ngày thi thứ nhất : **06/01/2016**

Bài 1 (5 *điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x - y + z^2 = 3 \\ x^2 - y^2 - 2z = -1 \\ 6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Bài 2 (5 *điểm*). **a)** Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+n+1)$, với $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh chỉ có hữu hạn số n sao cho $\{a_n\} < \frac{1}{2}$.

b) Cho dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = \ln(2n^2+1) + \ln(n^2+n+1)$, với $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh tồn tại vô hạn số n sao cho $\{b_n\} < \frac{1}{2016}$.

Trong đó $\{x\}$ là ký hiệu phần lẻ của số thực $x : \{x\} = x - [x]$.

Bài 3 (5 *điểm*). Cho tam giác ABC có B, C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi D là trung điểm của BC và E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của D lên AB, AC.

a) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. EF cắt AO và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN đi qua một điểm cố định.

b) Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại E, F cắt nhau tại T. Chứng minh T thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 4 (5 *điểm*). Người ta trồng hai loại cây khác nhau trên một miếng đất hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông (mỗi ô trồng một cây). Một cách trồng cây được gọi là *ấn tượng* nếu như:

i) Số lượng cây được trồng của hai loại cây bằng nhau;

ii) Số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi hàng không nhỏ hơn một nửa số ô của hàng đó và số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi cột không nhỏ hơn một nửa số ô của cột đó.

a) Hãy chỉ ra một cách trồng cây ấn tượng khi $m = n = 2016$.

b) Chứng minh nếu có một cách trồng cây ấn tượng thì cả m và n đều là bội của 4.

---HẾT---

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

BẢN CHÍNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2016

Môn : TOÁN

Thời gian : **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)

Ngày thi thứ hai : **07/01/2016**

Bài 5 (6 *điểm*). Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

i) $f(1)=2016$;

ii) $f\left(x+y+f(y)\right)=f(x)+ay$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Bài 6 (7 *điểm*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) (với tâm O) có các góc ở đỉnh B và C đều nhọn. Lấy điểm M trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A sao cho AM không vuông góc với BC. AM cắt trung trực của BC tại T. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOT cắt (O) tại N $(N\neq A)$.

a) Chứng minh $\widehat{BAM}=\widehat{CAN}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và G là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. AI, MI, NI cắt (O) lần lượt tại D, E, F. Gọi P và Q tương ứng là giao điểm của DF với AM và DE với AN. Đường tròn đi qua P và tiếp xúc với AD tại I cắt DF tại H ($H\neq D$), đường tròn đi qua Q và tiếp xúc với AD tại I cắt DE tại K ($K\neq D$).

Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác GHK tiếp xúc với BC.

Bài 7 (7 *điểm*). Số nguyên dương n được gọi là số hoàn chỉnh nếu n bằng tổng các ước số dương của nó (không kể chính nó).

a) Chứng minh rằng nếu n là số hoàn chỉnh lẻ thì n có dạng

$$n=p^s m^2,$$

trong đó p là số nguyên tố có dạng $4k+1$, s là số nguyên dương có dạng $4h+1$ và m là số nguyên dương không chia hết cho p.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $n>1$ sao cho $n-1$ và $\dfrac{n(n+1)}{2}$ đều là các số hoàn chỉnh.

---HẾT---

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*