

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2017

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

BẢN CHÍNH

Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất : 05/01/2017

Bài 1 (5,0 điểm). Cho a là một số thực và xét dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = a, u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- a) Khi $a = 5$, chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
b) Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số (u_n) xác định và có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5,0 điểm). Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn

$$P(1 + \sqrt[3]{2}) = 1 + \sqrt[3]{2} \text{ và } P(1 + \sqrt{5}) = 2 + 3\sqrt{5}.$$

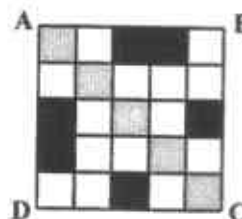
Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh B, C ; AH cắt (O) tại D (D khác A).

- a) Gọi I là trung điểm của AH ; EI cắt BD tại M và FI cắt CD tại N . Chứng minh rằng $MN \perp OH$.
b) Các đường thẳng DE, DF cắt (O) lần lượt tại P, Q (P và Q khác D). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) và AO lần lượt tại R và S (R và S khác A). Chứng minh rằng BP, CQ và RS đồng quy.

Bài 4 (5,0 điểm). Cho số nguyên $n > 1$. Bảng vuông $ABCD$ kích thước $n \times n$ gồm n^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô vuông đơn vị được tô bởi một trong ba màu: đen, trắng, xám. Một cách tô màu được gọi là *đối xứng* nếu mỗi ô có tâm trên đường chéo AC được tô màu xám và mỗi cặp ô đối xứng qua AC được tô cùng màu đen hoặc cùng màu trắng. Người ta điền vào mỗi ô xám số 0, mỗi ô trắng một số nguyên dương và mỗi ô đen một số nguyên âm. Một cách điền số như vậy được gọi là k -cân đối (với k nguyên dương) nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) Mỗi cặp ô đối xứng qua AC được điền cùng một số nguyên thuộc đoạn $[-k; k]$.
(ii) Nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô đen thì tập các số nguyên dương được điền trên hàng đó và tập các số nguyên dương được điền trên cột đó không giao nhau; nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô trắng thì tập các số nguyên âm được điền trên hàng đó và tập các số nguyên âm được điền trên cột đó không giao nhau.

- a) Với $n = 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của k để tồn tại cách điền số k -cân đối cho cách tô màu đối xứng ở hình bên.
b) Với $n = 2017$, tìm giá trị nhỏ nhất của k để với mọi cách tô màu đối xứng, luôn tồn tại cách điền số k -cân đối.



HẾT

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

NĂM 2017

BẢN CHÍNH

Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai : 06/01/2017

Bài 5 (6,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy$$

với mọi số thực x, y .

Bài 6 (7,0 điểm). Chứng minh rằng:

a) $\sum_{k=1}^{1008} kC_{2017}^k \equiv 0 \pmod{2017^2}$.

b) $\sum_{k=1}^{504} (-1)^k C_{2017}^k \equiv 3(2^{2016} - 1) \pmod{2017^2}$.

Bài 7 (7,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và G là một điểm thuộc cung \widehat{BC} không chứa O của đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác OBC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABG cắt AC tại E , đường tròn ngoại tiếp tam giác ACG cắt AB tại F (E và F khác A).

a) Gọi K là giao điểm của BE và CF . Chứng minh rằng AK , BC và OG đồng quy.

b) Cho D là một điểm thuộc cung \widehat{BOC} chứa O của đường tròn (I) ; GB cắt CD tại M , GC cắt BD tại N . Giả sử MN cắt (O) tại hai điểm P, Q . Chứng minh rằng khi G thay đổi trên cung \widehat{BC} không chứa O của đường tròn (I) , đường tròn ngoại tiếp tam giác GPQ luôn đi qua hai điểm cố định.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.