

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT  
NĂM 2018

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất : 11/01/2018

**BẢN CHÍNH**

**Bài 1 (5,0 điểm).** Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi  $x_1 = 2$  và  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3}$  với  $n \geq 1$ .

a) Chứng minh rằng dãy số  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mỗi số nguyên dương  $n$ , chứng minh rằng  $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n+1$ .

**Bài 2 (5,0 điểm).** Cho tam giác nhọn không cân  $ABC$  và  $D$  là một điểm trên cạnh  $BC$ . Lấy điểm  $E$  trên cạnh  $AB$  và lấy điểm  $F$  trên cạnh  $AC$  sao cho  $\widehat{DEB} = \widehat{DFC}$ . Các đường thẳng  $DF, DE$  lần lượt cắt  $AB, AC$  tại  $M, N$ . Gọi  $(I_1), (I_2)$  tương ứng là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $DEM, DFN$ . Kí hiệu  $(J_1)$  là đường tròn tiếp xúc trong với  $(I_1)$  tại  $D$  và tiếp xúc với  $AB$  tại  $K$ ,  $(J_2)$  là đường tròn tiếp xúc trong với  $(I_2)$  tại  $D$  và tiếp xúc với  $AC$  tại  $H$ ,  $P$  là giao điểm của  $(I_1)$  và  $(I_2)$ ,  $Q$  là giao điểm của  $(J_1)$  và  $(J_2)$  ( $P, Q$  khác  $D$ ).

a) Chứng minh rằng  $D, P, Q$  thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AHK$  và đường thẳng  $AQ$  lần lượt tại  $G$  và  $L$  ( $G, L$  khác  $A$ ). Chứng minh rằng tiếp tuyến tại  $D$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DQG$  cắt đường thẳng  $EF$  tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DLG$ .

**Bài 3 (5,0 điểm).** Một nhà đầu tư có hai mảnh đất hình chữ nhật cùng kích thước là  $120m \times 100m$ .

a) Trên mảnh đất thứ nhất, nhà đầu tư muốn xây một ngôi nhà có nền hình chữ nhật kích thước  $25m \times 35m$  và xây bên ngoài 9 bồn hoa hình tròn đường kính  $5m$ . Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở đâu thì trên phần đất còn lại vẫn đủ chỗ xây ngôi nhà đó.

b) Trên mảnh đất thứ hai, nhà đầu tư muốn xây một hồ cá hình một đa giác lồi sao cho từ một điểm bất kì trên phần đất còn lại có thể đi không quá  $5m$  thì đến bờ hồ. Chứng minh rằng chu vi của hồ không nhỏ hơn  $(440 - 20\sqrt{2})m$ .

**Bài 4 (5,0 điểm).** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $(C)$  là đồ thị của hàm số  $y = \sqrt[3]{x^2}$ . Một đường thẳng  $d$  thay đổi sao cho  $d$  cắt  $(C)$  tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là  $x_1, x_2, x_3$ .

a) Chứng minh rằng đại lượng  $\sqrt[3]{\frac{x_1 x_2}{x_3^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_2 x_3}{x_1^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_3 x_1}{x_2^2}}$  là một hằng số.

b) Chứng minh rằng  $\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2 x_3}} + \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3 x_1}} + \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1 x_2}} < -\frac{15}{4}$ .

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT  
ĐỀ THI CHÍNH THỨC NĂM 2018

Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai : 12/01/2018

**BẢN CHÍNH**

**Bài 5 (6,0 điểm).** Cho các số nguyên dương  $n$  và  $d$ . Xét tập hợp  $S_n(d)$  gồm tất cả các bộ số có thứ tự  $(x_1, \dots, x_d)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i)  $x_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  với mọi chỉ số  $1 \leq i \leq d$ ;
- (ii)  $x_i \neq x_{i+1}$  với mọi chỉ số  $1 \leq i \leq d-1$ ;
- (iii) không tồn tại các chỉ số  $1 \leq i < j < k < l \leq d$  sao cho  $x_i = x_k$  và  $x_j = x_l$ .

- a) Tính số phần tử của tập hợp  $S_3(5)$ .
- b) Chứng minh rằng tập hợp  $S_n(d)$  khác rỗng khi và chỉ khi  $d \leq 2n-1$ .

**Bài 6 (7,0 điểm).** Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi  $x_0 = 2, x_1 = 1$  và  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$  với mọi  $n \geq 0$ .

- a) Với  $n \geq 1$ , chứng minh rằng nếu  $x_n$  là số nguyên tố thì  $n$  là số nguyên tố hoặc  $n$  không có ước nguyên tố lẻ.
- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm  $(m, n)$  sao cho  $x_n$  chia hết cho  $x_m$ .

**Bài 7 (7,0 điểm).** Cho tam giác nhọn không cân  $ABC$  có trọng tâm  $G$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $H_a, H_b, H_c$  lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh  $A, B, C$  của tam giác  $ABC$  và  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ . Các tia  $GH_a, GH_b, GH_c$  lần lượt cắt  $(O)$  tại các điểm  $X, Y, Z$ .

- a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $XCE$  đi qua trung điểm đoạn thẳng  $BH_a$ .
- b) Gọi  $M, N, P$  tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng  $AX, BY, CZ$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $DM, EN, FP$  đồng quy.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.